Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Constanţa, 3 aprilie 2012

CLASA a VIII-a

Problema 1. Determinaţi numerele reale a, b, c, d astfel încât $ab + c + d = 3$, $bc + d + a = 5$, $cd + a + b = 2$ şi $da + b + c = 6$.

Problema 2. În planul xOy se consideră mulţimea de puncte

$$X = \{P(a,b) \mid (a,b) \in \{1,2,...,10\} \times \{1,2,...,10\}\}.$$

Determinaţi numărul de drepte diferite care se obţin unind câte două dintre punctele mulţimii X, astfel încât oricare două drepte nu sunt paralele.

Problema 3. Se consideră triunghiurile ascuţitunghice ACD şi BCD, situate în plane diferite. Fie G şi H centrul de greutate, respectiv ortocentrul triunghiului BCD, iar G' şi H' centrul de greutate, respectiv ortocentrul triunghiului ACD. Ştiind că dreapta HH' este perpendiculară pe planul (ACD), arătaţi că dreapta GG' este perpendiculară pe planul (BCD).

Problema 4.
Pentru orice mulţimi numerice nevide A şi B, notăm
$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$.

a) Determinaţi cel mai mare număr natural nenul p cu proprietatea că există $A, B \subset \mathbb{N}$ astfel încât $\text{card}A = \text{card}B = p$ şi $A+B = \{0,1,2,...,2012\}$.

b) Determinaţi cel mai mic număr natural nenul n cu proprietatea că există $A, B \subset \mathbb{N}$ astfel încât $\text{card}A = \text{card}B = n$ şi $A+B = \{0,1,2,...,2012\}$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.